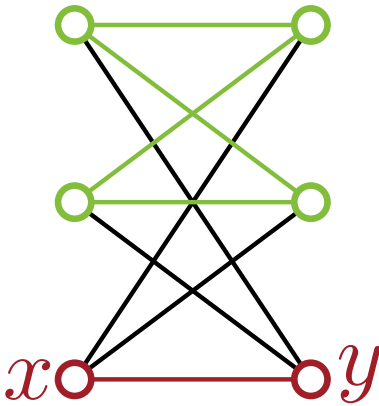
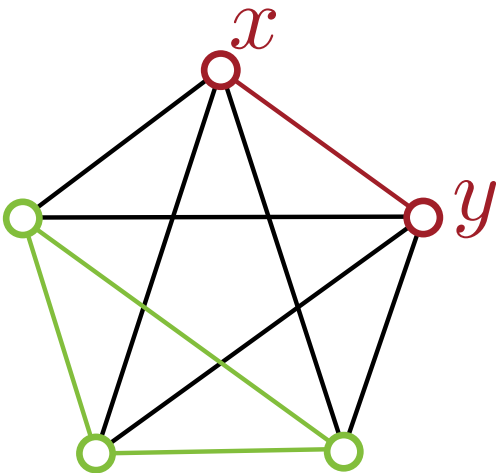


Satz von Kuratowski

Sommersemester 2018



1 Satz von Kuratowski

Der Satz von Kuratowski ist ein fundamentales Resultat der Graphentheorie. Er charakterisiert die planaren Graphen anhand verbotener Substrukturen.

Es gibt zwei äquivalente Ergebnisse, die häufig als Satz von Kuratowski bezeichnet werden:

Satz 1 (Kuratowski 1930). *Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als **topologischen** Minor enthält.*

Satz 2 (Wagner 1937). *Ein Graph $G = (V, E)$ ist genau dann planar, wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.*

Im folgenden Abschnitt 2 werden zunächst einige Definitionen eingeführt und der Unterschied zwischen Minoren und topologischen Minoren erläutert. Anschließend wird in Abschnitt 3 gezeigt, die Sätze von Wagner und Kuratowski äquivalent sind. In Abschnitt 4 wird der Beweis für den Satz von Wagner geführt. Dafür wird ein wichtiges Lemma zunächst vorausgesetzt und erst in Abschnitt 5 bewiesen.

2 Subgraph, (topologischer) Minor, Unterteilung

$H = (V', E')$ mit $E' \subseteq V' \times V'$ heißt *Subgraph* von $G = (V, E)$ falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.

Eine Teilmenge $V' \subseteq V$ induziert einen Subgraph $G[V'] = (V', E(V'))$ von G , mit $E(V') := \{e \in E : \text{beide Endknoten von } e \text{ sind in } V'\}$.

G heißt *Unterteilung* von H , falls G aus H entsteht, indem Kanten aus H durch einfache Wege ersetzt werden. Siehe Abbildung 1.

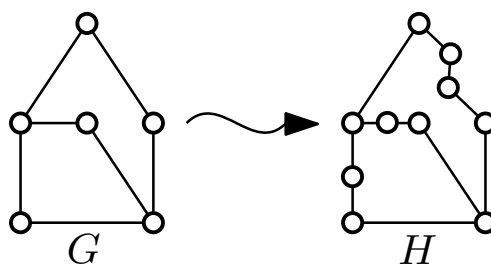
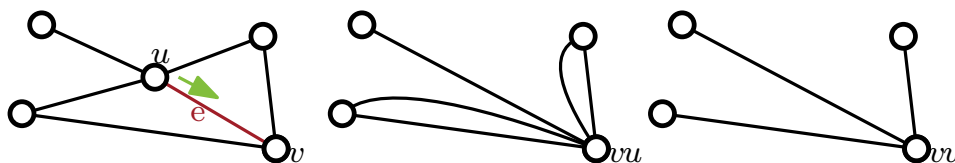


Abbildung 1: H ist eine Unterteilung von G .

H ist *topologischer Minor* von G , falls G eine Unterteilung von H als Subgraphen enthält.

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$ in G bedeutet, dass u und v miteinander identifiziert werden, dass e aus G gelöscht wird und dass entstandene Mehrfachkanten gelöscht werden. Siehe Abbildung 2.

H ist *Minor* von G , wenn G einen Subgraph enthält, aus dem durch Kontraktion H hervorgeht.

Abbildung 2: Kontraktion der Kante $\{u, v\}$

Die beiden Minorbegriffe sind nicht äquivalent: Jeder topologische Minor von G ist auch gewöhnlicher Minor von G . Es werden nur Kanten kontrahiert, die einen Knoten mit Grad 2 haben. Die Rückrichtung gilt im Allgemeinen nicht. Betrachte zum Beispiel den Petersengraph in Abbildung 3. Er enthält K_5 als Minor, aber nicht als topologischen Minor. Da Unterteilung die Grade der ursprünglichen Knoten erhält, müsste es mindestens 5 Knoten mit Grad 4 geben, um eine Unterteilung des K_5 als Subgraphen zu enthalten.

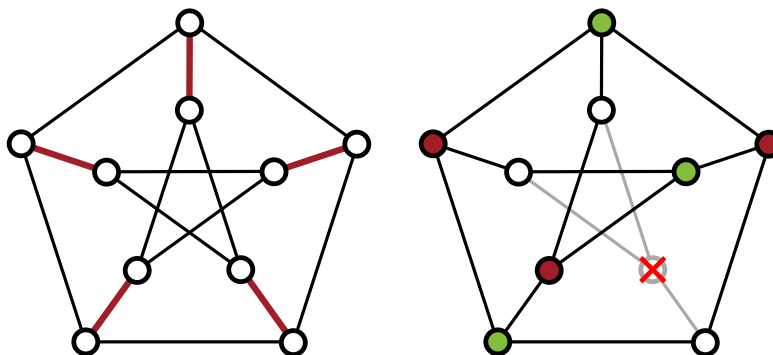


Abbildung 3: Durch Kontraktion der roten Kanten erhält man K_5 als Minor vom Petersengraph. Er enthält K_5 jedoch nicht als topologischen Minor. Dafür enthält der Petersengraph $K_{3,3}$ als topologischen Minor und ist daher auch nach dem Satz von Kuratowski nicht planar.

3 Äquivalenz der Sätze von Wagner und Kuratowski

Selbst wenn nicht jeder Minor auch ein topologischer Minor ist, charakterisieren der Satz von Wagner und der Satz von Kuratowski dennoch die gleiche Menge an Graphen als planar. Dies gilt, weil, wie im Folgenden gezeigt wird, ein Graph der K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor enthält, auch einen der beiden als topologischen Minor enthalten muss.

Zunächst wird eine Aussage über Minoren mit Maximalgrad 3 - wie der $K_{3,3}$ einer ist - gezeigt.

Lemma 1. *Sei H ein Graph mit Maximalgrad $\Delta \leq 3$. Falls H ein Minor von G ist, dann ist H auch topologischer Minor von G .*

Beweis. Sei G' ein Subgraph von G , sodass man H aus G' nur durch Kontraktionen erhält. Angenommen es soll eine Kante $e = \{u, v\} \in E(G')$ kontrahiert werden. O.B.d.A. seien $N(u)$

und $N(v)$ disjunkt. Sonst gibt es einen gemeinsamen Nachbarn w . Das Löschen der Kante $\{u, w\}$ ist unter topologischer Minorenbildung erlaubt und die Kante würde während der Kontraktion eine Doppelkante erzeugen, die wieder gelöscht wird. Siehe Abbildung 4.

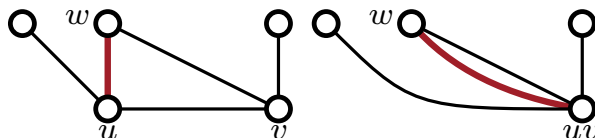


Abbildung 4: Nach dem Entfernen der Kante zum gemeinsamen Nachbar w hat u Grad 2.

Für den Knotengrad des neuen Knoten uv gilt also: $\delta_{G'}(uv) = \delta_G(u) - 1 + \delta_G(v) - 1$.

Da H Maximalgrad $\Delta \leq 3$ hat gilt entweder $\delta_{G'}(u) \leq 2$ oder $\delta_{G'}(v) \leq 2$. Wenn einer der Knoten Grad 1 hat kann er gelöscht werden anstatt eine Kontraktion durchzuführen. Sonst gibt es einen Knoten mit Grad 2, dieser kann, als Umkehroperation zur Unterteilung, durch eine einfache Kante ersetzt werden. \square

Lemma 2. *Falls ein Graph G K_5 als Minor enthält so enthält G auch K_5 oder $K_{3,3}$ als topologischen Minor.*

Beweis. Sei H ein minimaler Subgraph von G , sodass K_5 nur durch Kontraktionen aus H entsteht. Weiter sei $\{V_1, \dots, V_5\}$ eine Partition der Knoten von H , sodass die Kontraktion von V_i einen Knoten v_i im K_5 -Minor liefert. Nach der Minimalität von H ist $H[V_i]$ ein Baum und V_i hat exakt eine ausgehende Kante zu jedem $V_j, j \neq i$. Sei T_i der Baum bestehend aus $H[V_i]$ und diesen 4 Kanten zu $V_j, j \neq i$. Falls alle T_i eine Unterteilung von $K_{1,4}$ sind, so ist H eine Unterteilung von K_5 , siehe Abbildung 5a. Falls es einen T_i gibt der keine Unterteilung von $K_{1,4}$ ist, hat $H[V_i]$ zwei Knoten mit Grad 3, siehe Abbildung 5b, und es ist ein $K_{3,3}$ -Minor gefunden. Nach Lemma 1 ist dieser auch topologischer Minor. \square

Korollar 1. *Falls G $K_{3,3}$ oder K_5 als Minor enthält, so enthält G ebenfalls $K_{3,3}$ oder K_5 als topologischen Minor.*

Nach Korollar 1 folgt aus der Korrektheit vom Satz von Wagner auch die Korrektheit vom Satz von Kuratowski.

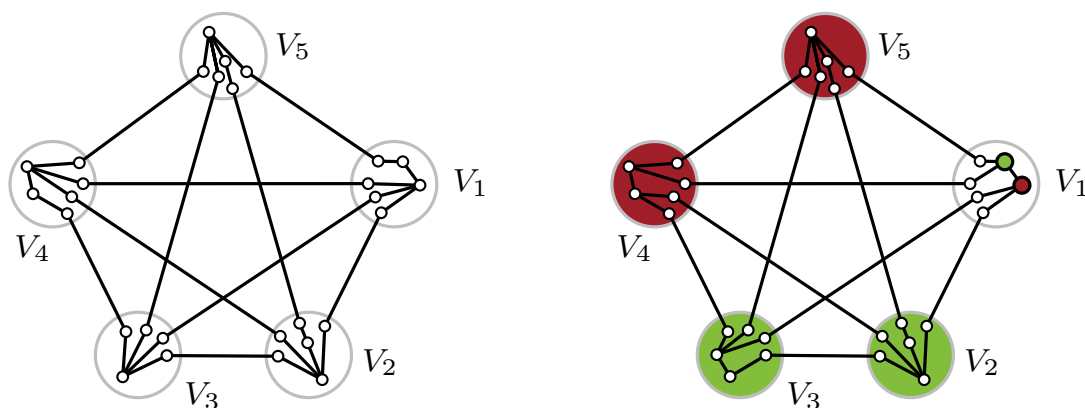
4 Beweis des Satzes von Wagner

Im Folgenden wird der Satz von Wagner bewiesen. Der Beweis orientiert sich an dem Beweis den Makarychev ¹ geführt hat. Dazu zunächst einige Beobachtungen:

Ein planarer Graph kann

¹Makarychev, Yury: A Short Proof of Kuratowski's Graph Planarity Criterion. J. Graph Theory, Seiten 129–131, Juni 1997

<http://ttic.uchicago.edu/~yury/papers/kuratowski.pdf>



(a) Alle T_i sind eine Unterteilung von $K_{1,4}$.
 K_5 als topologischer Minor gefunden.

(b) Mindestens ein T_i ist keine Unterteilung von
 $K_{1,4}$. $K_{3,3}$ als Minor gefunden.

Abbildung 5: Ist K_5 Minor von G , ist K_5 oder $K_{3,3}$ topologischer Minor von G .

- keinen nicht planaren Graphen als Subgraphen enthalten.
- keinen nicht planaren Minor enthalten.
- weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthalten.

Damit ist die eine Richtung des Beweises klar und es verbleibt folgende Behauptung zu beweisen:
 Wenn G nicht planar ist, enthält G K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor.

Zum Beweis der Behauptung werden *minorminimal* nicht planare Graphen betrachtet.

Definition 1. G heißt *minorminimal nicht planar*, falls G nicht planar ist, aber jeder Minor von G planar ist.

Um sich mit *minorminimal nicht planaren* Graphen vertraut zu machen, überzeuge der Leser sich von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

- *Minorminimal nicht planare* Graphen haben Minimalgrad 3.
- Wenn G nicht planar ist, dann enthält G einen *minorminimal nicht planaren* Graphen als Minor.
- K_5 und $K_{3,3}$ sind *minorminimal nicht planar*.

Im Folgenden wird bewiesen, dass wenn ein Graph *minorminimal nicht planar* ist, er bereits K_5 oder $K_{3,3}$ sein muss und damit jeder nicht planare Graph entweder K_5 oder $K_{3,3}$ als Minor enthält.

K_5 und $K_{3,3}$ sind die einzigen minorminimal nicht planaren Graphen

Betrachte einen minorminimal nicht planaren Graphen $G = (V, E)$ und zwei beliebige benachbarte Knoten x und y . Sei $G' := G - x - y$ der Graph, der aus G entsteht, wenn x und y , sowie alle zu ihnen inzidente Kanten gelöscht werden. Diese Konstruktion für G' wird im Folgenden immer wieder verwendet werden.

Setze Lemma 3 voraus. Der Beweis wird in Abschnitt 5 nachgeliefert.

Lemma 3. G' ist ein einfacher Kreis.

Der Graph G besteht also aus einer Kante $\{x, y\}$, einem Kreis C und Kanten zwischen Knoten auf C und den Knoten x, y .

Die Möglichkeiten für den Graph G sollen weiter eingeschränkt werden, bis nur noch der K_5 und der $K_{3,3}$ übrig bleiben. Dazu wird Lemma 4 verwendet.

Lemma 4. Für zwei auf C benachbarte Knoten u und v gilt: Wenn $\{u, x\} \in E$ und $\{u, y\} \notin E$, dann folgt $\{v, x\} \notin E$.

Beweis. Angenommen G sieht aus wie in Abbildung 6: Es gibt die Kante $\{u, x\}$ aber nicht $\{u, y\}$. Wenn die Kante $\{v, x\}$ existiert kann sie entfernt werden, um eine planare Einbettung des Graphen $(V, E \setminus \{v, x\})$ zu erhalten, da G minorminimal nicht planar ist.

Knoten u hat Grad 3, da er neben seinen Nachbarn auf dem Kreis nur eine Kante zum Knoten x hat. Daher gilt für jede Einbettung, dass von u aus gesehen die Kanten $\{u, x\}$ und $\{u, v\}$ unmittelbar aufeinander folgen. Die Kante $\{v, x\}$ kann daher immer planar eingefügt werden. Damit wäre auch G planar. \square

Jeder Knoten auf C muss zu x oder y benachbart sein, um den Minimalgrad 3 zu erreichen. Also sind nach Lemma 4 entweder alle Knoten auf C mit x und y durch eine Kanten verbunden oder die Knoten auf C sind *abwechselnd* mit x und y verbunden.

Beachte, dass die Knoten x und y beliebig gewählt waren. Das bedeutet wenn man aus G zwei beliebige benachbarte Knoten entfernt, muss nach Lemma 3 immer ein einfacher Kreis zurückbleiben.

Um die Gestalt von G weiter einzuschränken, betrachte die Größe von C .

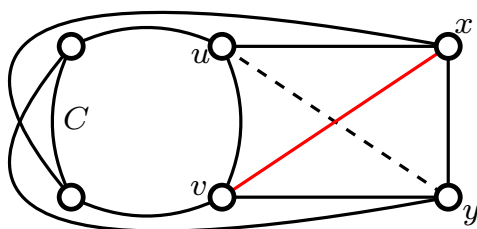


Abbildung 6: Nach Lemma 4 kann es $\{v, x\}$ ohne $\{u, y\}$ nicht geben.

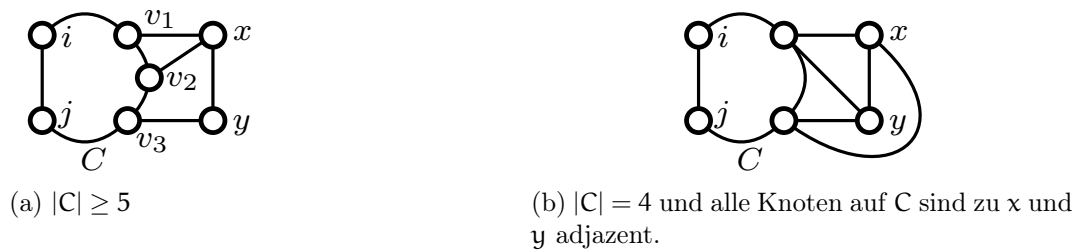


Abbildung 7: Zwei Einschränkungen für G : In beiden Fällen können die auf C benachbarten Knoten i und j entfernt werden und es bleibt kein einfacher Kreis zurück. Im Widerspruch zu Lemma 3.



Abbildung 8: K_5 und $K_{3,3}$ bestehen aus einem Kreis C und einer Kante $\{x, y\}$. Wobei x und y zu jedem bzw. jedem zweiten Knoten auf dem Kreis adjazent sind.

Angenommen $|C| \geq 5$. Siehe Abbildung 7a. Entfernt man zwei beliebige auf C benachbarte Knoten i und j , so bleiben von C mindestens drei Knoten auf einem einfachen Weg zurück. Benenne sie so, dass v_2 zu v_1 und v_3 adjazent ist.

Da v_2 auch zu x oder y adjazent sein muss, hat v_2 in $G' = G - i - j$ mindestens Grad 3 und G' ist damit kein einfacher Kreis. Daher hat C die Größe 3 oder 4.

Betrachte den Fall $|C| = 4$. Angenommen alle Knoten auf C sind zu x und y adjazent. Mit der gleichen Argumentation wie bei $|C| \geq 5$ folgt ein Widerspruch. Siehe Abbildung 7b. Also müssen die Knoten auf C abwechselnd zu x und y adjazent sein und es ergibt sich der $K_{3,3}$, siehe Abbildung 8b.

Im verbleibenden Fall $|C| = 3$ können die Knoten auf C nicht abwechselnd zu x und y benachbart sein, also sind sie alle zu x und y adjazent. Es ergibt sich der K_5 , siehe Abbildung 8a.

Folglich sind K_5 und $K_{3,3}$ die einzigen Möglichkeiten für G und damit die einzigen minorminimal nicht planaren Graphen. Nicht planare Graphen können daher über verbotene Minoren charakterisiert werden: Ein Graph ist genau dann planar, wenn er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor enthält.

Der Satz von Wagner und nach Abschnitt 3 auch der Satz von Kuratowski sind damit bewiesen.

5 Werkzeugkiste

Nachdem der Beweis des Satzes von Wagner unter Zuhilfenahme von Lemma 3 abgeschlossen ist, gilt es noch die Korrektheit von Lemma 3 zu zeigen.

Zur Erinnerung: Lemma 3 bezieht sich auf einen minorminimal nicht planaren Graphen $G = (V, E)$ und genauer den Graphen $G' := G - x - y = (G/xy) - xy$, der entsteht, wenn man aus G zwei beliebige benachbarte Knoten x und y , sowie alle zu ihnen inzidente Kanten löscht. Die Aussage war, dass G' ein einfacher Kreis sein muss.

Um die Korrektheit von Lemma 3 zu zeigen, werden zunächst zwei weitere Hilfsaussagen über G' bewiesen:

Lemma 5. G' enthält keinen Θ -Graph.

Lemma 6. G' enthält höchstens einen Knoten vom Grad ≤ 1 .

Dabei ist ein Θ -Graph eine beliebige Unterteilung des Multigraphen in Abbildung 9.

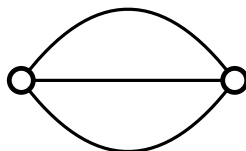


Abbildung 9: Der Multigraph sieht wie ein Θ aus.

Beweis von Lemma 5

Im folgenden Beweis werden allgemeine Aussagen über planare Graphen verwendet von denen sich der Leser überzeuge:

- Nur Bäume und Wälder besitzen genau eine Facette. Bei einem Graphen mit mindestens zwei Facetten enthält jeder Facettenrand einen Kreis.
- Sei G planar und C ein einfacher Kreis in G . Wenn keine zwei Knoten auf C in $G - E(C)$ durch einen Pfad verbunden sind, dann besitzt G eine planare Einbettung bei der C die äußere Facette begrenzt. Siehe Abbildung 10.
- Sei f eine Facette in einer planaren Einbettung eines Graphen G . Der Teilgraph F von G , der aus allen zu f inzidenten Knoten und Kanten besteht, wird als Facettenrand bezeichnet. Facettenränder enthalten keinen Θ -Graph. Siehe Abbildung 11.

Angenommen G' enthält einen Θ -Graph. Konstruiere zum Widerspruch eine planare Einbettung von G .

Betrachte eine planare Einbettung $\Gamma_{G'}$ von G' , bei der alle Knoten die zu x oder y benachbart sind auf dem Rand einer Facette f liegen. Eine solche Einbettung existiert, da sich G/xy planar

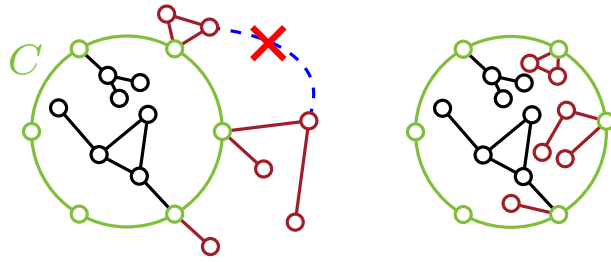


Abbildung 10: Keine zwei Knoten auf C sind in $G - E(C)$ durch einen Pfad verbunden. Daher gibt es eine Einbettung bei der C die äußere Facette begrenzt.

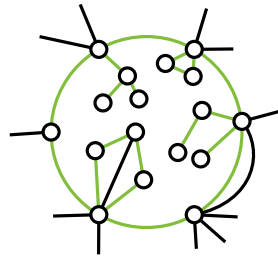


Abbildung 11: Facettenränder enthalten keinen Θ -Graph.

einbetten lässt. Sei F der Subgraph von G' der aus allen zu f inzidenten Knoten und Kanten besteht, dann enthält F keinen Θ -Graph. Da G' nach Annahme kein Wald ist, enthält F aber einen Kreis C .

Wähle o.B.d.A. eine Einbettung von G/xy , bei der xy im Inneren von F liegt.

Nach Annahme enthält G' einen Θ -Graph, daher existiert eine Kante $e \in E(G') \setminus E(F)$. Die Kante e liegt also im Äußeren von C , bezeichnet als $\text{ext}(C)$.

G ist minorminimal nicht planar und $\text{ext}(C)$ nicht leer. Daraus folgt, dass $G - \text{ext}(C)$ planar ist. Weil keine zwei Knoten auf C durch einen Weg im Inneren von C verbunden sind, kann man eine planare Einbettung $\Gamma_{G-\text{ext}(C)}$ von $G - \text{ext}(C)$ wählen, bei der C die äußere Facette begrenzt.

Kombiniere die Einbettungen $\Gamma_{G'}$ und $\Gamma_{G-\text{ext}(C)}$ zu einer planaren Einbettung von G . Widerspruch zu G ist nicht planar. Damit ist der Beweis von Lemma 5 abgeschlossen. Das Lemma wird in den folgenden Beweisen von Lemma 6 und Lemma 3 oft gebraucht.

Beweis von Lemma 6

Zur Erinnerung; die Aussage von Lemma 6 war: G' enthält höchstens einen Knoten vom Grad ≤ 1 .

Knoten vom Grad 0 lassen sich schnell ausschließen. Für alle Knotengrade von Knoten v in G gilt $\delta_G(v) \geq 3$. Daher gilt für die Knotengrade in G' $\delta_{G'}(v) \geq 1$.

Angenommen es existieren zwei verschiedene Knoten u und v mit $\delta_{G'}(u) = \delta_{G'}(v) = 1$. Unter

dieser Annahme bleiben nicht mehr viele Möglichkeiten für G übrig. Im Folgenden werden alle aufgezählt und gezeigt, dass sie planar sind und damit der Nichtplanarität von G widersprechen.

In G sind die Knoten u und v jeweils zu x und y adjazent, daher enthält G einen Θ -Graph. Gibt es außerdem eine Kante $\{i, j\} \in E$ mit $i, j \notin \{x, y, u, v\}$ dann enthielte der Graph $G' = G - i - j$ einen Θ -Graph, im Widerspruch zu Lemma 5. Siehe Abbildung 12.

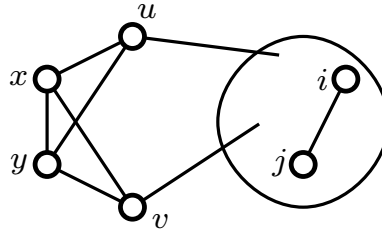
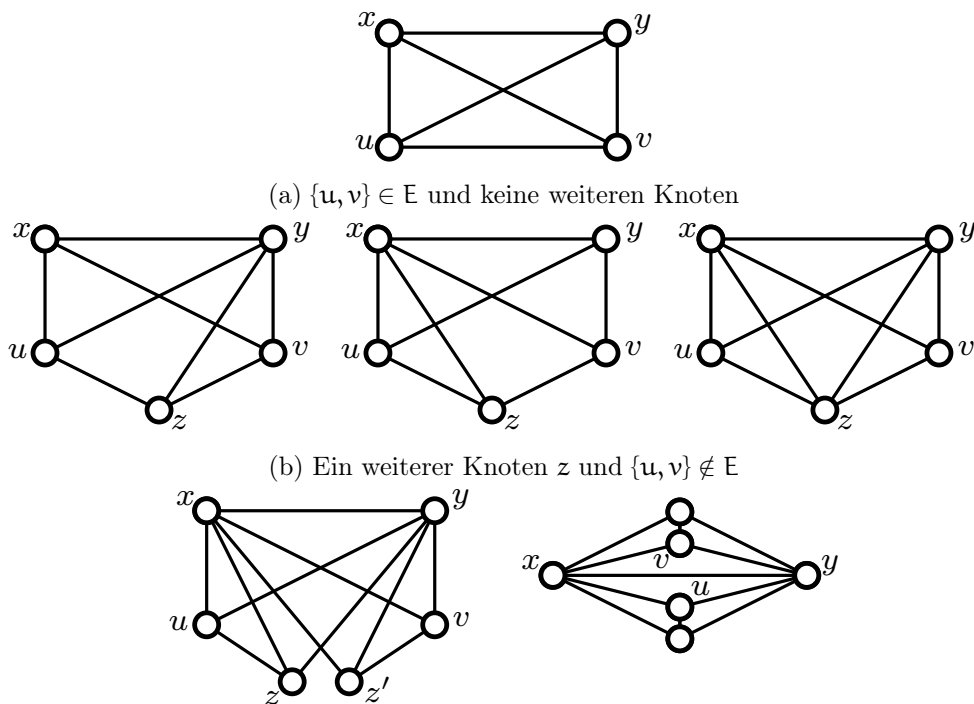


Abbildung 12: Gibt es in G' zwei Knoten u und v mit Grad 1, sind sie in G mit x und y verbunden. Daher enthält G einen Θ -Graph und es darf nach Lemma 5 keine unabhängige Kante geben.



(c) Zwei weitere Knoten z, z' mit $\{z, z'\} \notin E$ und $\{u, v\} \notin E$. Es ist zweimal der gleiche Graph dargestellt.

Abbildung 13: Alle Möglichkeiten für die Gestalt von G im Beweis von Lemma 6.

In Abbildung 13 sind alle Möglichkeiten wie G aussehen kann aufgeführt. In 13b und 13c kann es die Kante $\{u, v\}$ nicht geben, da sonst $\delta_{G'}(u) \geq 1$ und $\delta_{G'}(v) \geq 1$ wäre, was der Annahme widerspricht.

Für einen dritten zusätzlichen Knoten z'' in 13c müsste ebenfalls $\delta_G(z'') \geq 3$ gelten. Zu u und v kann er nicht adjazent sein, da für sie nach Annahme $\delta_G(u) = \delta_G(v) = 3$ gilt. Die Kanten $\{z, z''\}$ und $\{z', z''\}$ kann es nicht geben, da ihr Entfernen einen Θ -Graph hinterläßt. Folglich kann z'' nur zu x und y adjazent sein und es gilt $\delta_G(z'') \leq 2$.

In allen Fällen ist G planar, im Widerspruch zur Nichtplanarität von G .

Damit ist der Beweis von Lemma 6 abgeschlossen und es liegen alle Werkzeuge bereit, um Lemma 3 zu beweisen.

Beweis von Lemma 3

Zur Erinnerung die Aussage von Lemma 3 war: G' ist ein einfacher Kreis.

Angenommen G' ist kein einfacher Kreis. Zeige, dass G planar ist. Betrachte dazu die *Blockzerlegung* von G' .

Einschub Blockzerlegung

Definition 2. Äquivalenzrelation auf der Kantenmenge:

$e_1 \sim e_2 \Leftrightarrow e_1 = e_2$ oder es existiert ein einfacher Kreis, der e_1 und e_2 enthält.

Nenne den Subgraphen bestehend aus der Äquivalenzklasse einer Kante und alle zugehörigen Knoten einen *Block*.

Jede Kante ist in genau einem Block. In mehreren Blöcken enthaltene Knoten heißen *Separator-knoten*. In Abbildung 14 sind die Separatorknoten rot dargestellt.

Ein Block, der weniger als zwei *Separator-knoten* hat heißt *Endblock*.

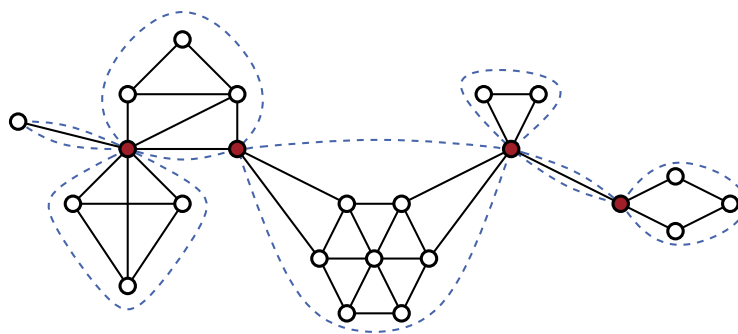


Abbildung 14: Blockzerlegung

Da G' keinen Θ -Graph enthält, besteht jeder Block entweder aus einem einfachen Kreis oder einer Kante. Siehe Abbildung 15.

Da nach Lemma 6 G' nicht nur aus einer einzelnen Kante bestehen kann, enthält G' nach Annahme mindestens zwei *Endblöcke* und, wieder wegen Lemma 6, ist mindestens einer davon ein Kreis.

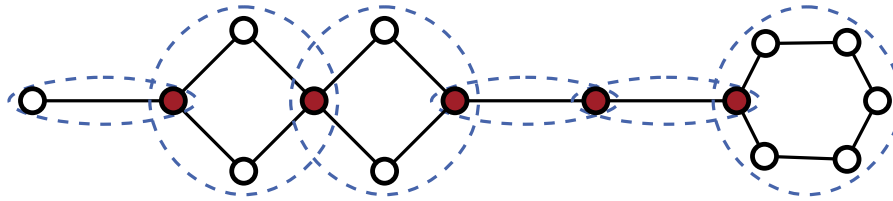


Abbildung 15: Blockzerlegung von G'

Betrachte einen solchen Kreis C und einen Separator-knoten v auf C .

Jeder Knoten i aus $C - v$ muss in G zu x oder y adjazent sein, um $\delta_G(i) \geq 3$ zu erreichen. Da C mindestens die Länge 3 hat, gibt es mindestens zwei solcher Knoten auf C . Diese bilden zusammen mit den drei Knoten x, y und v einen Θ -Graph in G . Siehe Abbildung 16.

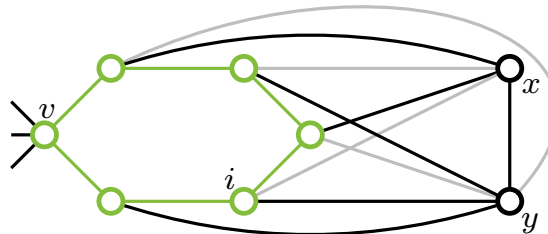


Abbildung 16: Alle Knoten auf C außer v müssen zu x oder y adjazent sein. In Grau sind andere mögliche Kanten dargestellt.

Wegen Lemma 5 gibt es in G keine Kante, die nicht zu C oder $\{x, y\}$ inzident sind, da ihr Entfernen einen Θ -Graph in G' zurücklassen würde. Aufgrund von Lemma 6 gibt es auch keine isolierten Knoten in G' . Es kann also höchstens einen Knoten u abgesehen von C und x, y geben, der durch eine Kante mit dem Separator-knoten v verbunden ist. Also sieht G' wie in Abbildung 17 dargestellt aus.

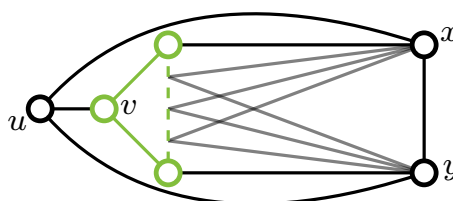


Abbildung 17: In G gibt es außerhalb von C nur die Knoten x, y und u .

Da $G - u - v$ keinen Θ -Graph enthält, hat C Länge 3. Der so definierte Graph, heißt *Prisma-Graph*. Siehe Abbildung 18.

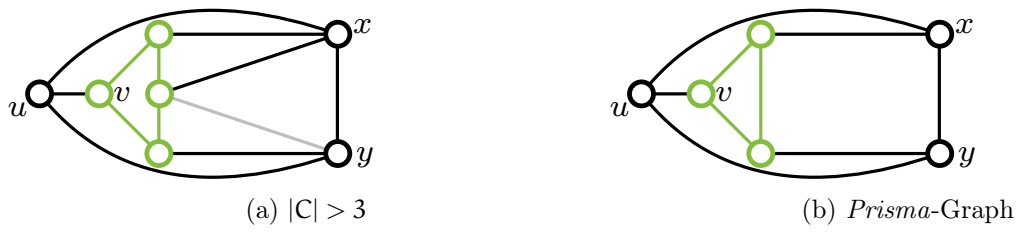


Abbildung 18: Der *Prisma*-Graph ist planar.

Der *Prisma*-Graph ist aber planar, im Widerspruch zur Nichtplanarität von G . Es folgt, dass G' ein einfacher Kreis ist. Damit sind alle offenen Behauptungen bewiesen.